科学の眼（まなこ）
姫路科学館サイエンストピック
Jul. 15, 2024, No. 600
671−2222 兵庫県姫路市青山 1470−15
TEL 079-267-3001
https://www.city.himeji.lg.jp/atom/

理工シリーズ

紀元前から続く無限の探求

はじまりの完全数「6」

The first perfect number “6” tempted mathematicians into infinite quest

姫路科学館　学芸・普及担当　松本万尋

当館が発行する「科学の眼」は、今回で第 600 号を迎えました。第 500 号の発行はちょうど 9 年前の 2015 年 7 月 15 日です。当館ホームページに第 401 号以降のバックナンバーを掲載しており[i]、これまでお届けしてきた科学の話題を遡ってご覧いただけます。今後も様々な話題をご提供できるよう、スタッフ一同努めて参ります。

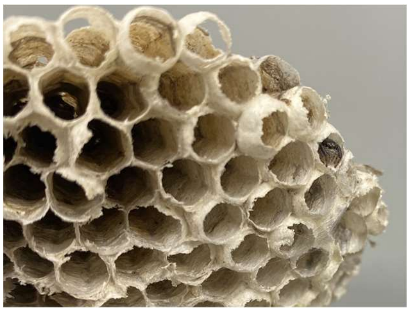

写真 1　アシナガバチ類の巣
（マミジロハエトリが潜んでいる）

さて、節目の今回は、科学全体を支える学問、数学の話題をご紹介します。600 からとって「6」という数について考えてみましょう。動物好きの筆者は、ハニカム構造、つまりハチの巣に現れる六角形の平面充填（写真 1）をはじめに思い浮かべましたが、数そのものにも面白い性質があります。

■6 は「完全な」数？[ii]

6 の約数（今回は正の約数）は 1、2、3、6 で、このうち 6 自身を除くものの和（1+2+3）は、元の数 6 に等しくなります。このような**「その数自身を除く約数の和」**（A）が元の数に等しくなる自然数は「完全数」と呼ばれており、6 は最小の完全数です。ちなみに、（A）が元の数より大きくなる自然数を「過剰数」、小さくなる自然数を「不足数」といい、6 は「1 桁の整数の中で唯一不足数ではない」という特徴も持っています。紀元前 100 年頃の人々は、この 3 種類の自然数について道徳的な意味付け（例えば美しさや礼儀について）を考えていたようです。「完全数」という名前は、紀元前 500 年頃に活躍した数学者ピタゴラス（写真 2）が付けたとされていますが、彼がなぜこのような数を「完全」と考えたのかはわかっていません。

古代の数学者たちは神秘的な完全数の性質に興味を持ち、紀元前 200 年代までに 4 つの完全数（6、28、496、8128）を発見しました。その後は 1000 年以上新たな発見がなく、13〜15 世紀のアラブ圏やヨーロッパの文献にようやく 5 番目（33550336）が登場します[iii]。1950 年代にコンピュータが導入されると計算速度が大幅に向上し、それ以前は 12 個しか見つかっていなかった完全数が、今日では計 51 個発見されています。

写真 2　バチカン宮殿の「Scuola di Atene」（Raffaello Santi, 1509-1510）。ピタゴラスやユークリッドとされる人物が描かれている。

■完全数の探し方

ある数が「完全数」であるか、つまり（A）がその数自身に等しくなるかを調べるとき、5 番目以降の完全数では

桁数が大きいので、自然数ひとつひとつについて順に（A）を計算して新たな完全数を探す方法はとてつもない時間がかかります（※）。

※５番目の完全数の探し方
後述の（B）は成り立つので、$2^{13}-1=8191$ が素数ならば $2^{13-1}(2^{13}-1)=33550336$ は完全数です。ある数が素数であるかは、その平方根より小さな数で順に割っていけば調べられます。しかし、現代広く使われる四則記号（+、-、×、÷）さえなかった時代、計算の難易度は現代とは全く異なっていたようです。４番目発見以降の長い空白期間にも納得がいきます。

紀元前 300 年頃の数学者ユークリッド（写真 2）は、完全数を判定する一つの方法を発見しました。**「$2^{p-1}(2^p-1)$ で表される自然数（ただし 2^p-1 は素数）は完全数である」（B）**というものです。2^p-1 が素数、つまり約数が 1 と 2^p-1 のみという条件で $N=2^{p-1}(2^p-1)$ について「(N の約数の総和)-N」を計算してみると、結果は N に等しくなり、N が完全数であることがわかります。ユークリッドは（B）が成り立つことを明らかにしましたが、この逆である「全ての完全数は $2^{p-1}(2^p-1)$（ただし 2^p-1 は素数）で表される」を証明することはできませんでした。ユークリッドが残したこの課題は、2000 年以上の時を経た現在も解き明かされていません。

2^p-1 で表される数は、この数について深く研究した修道士メルセンヌの名をとって「メルセンヌ数」と呼ばれ、そのうち素数であるものは「メルセンヌ素数」と呼ばれています。メルセンヌ素数を新しく見つけると、(B) の判定方法に当てはまる完全数も一緒に見つかります。最も新しく発見されたメルセンヌ素数は、メルセンヌ素数探索プロジェクト GIMPS（Great Internet Mersenne Prime Search）[iv]が 2018 年に明らかにした $2^{82589933}-1$ で、同時に $2^{82589933-1}(2^{82589933}-1)$ が完全数であると新たにわかりました。

ユークリッドが残した課題について、ガウスとともに「数学の２大巨人」として知られるオイラー（写真 3、18 世紀に 8 番目の完全数を発見）は、「偶数の完全数は、$2^{p-1}(2^p-1)$（ただし 2^p-1 は素数）の形しか存在しない」ことを明らかにしました。つまり、偶数の完全数はメルセンヌ素数と同じ数だけ存在するということです。これで、もし「奇数の完全数は存在しない」と証明されれば全ての完全数について（B）が成り立つことになりました。これまでに発見された完全数は全て偶数ですが、奇数の完全数が「存在しない」ことを証明するのは難しく、今のところ「(B) の逆は真であるか」の課題はやはり未解決のままです。

写真３　オイラーの肖像
(Emanuel Handmann, 1753)

■無限の可能性

数は無限に存在しますが、完全数もやはり無限にあるのでしょうか。この問いはまだ探求の途中にあります。「ある性質をもつ数が無限に存在するか？」は数学者にとって好奇心を刺激する問いだといいます。しかし、無限に挑む完全数の探求は、現代において何かの役に立つとは考えられていません。

ところで、一見、または本当に役に立たないことを探求することは、人間にとって不要なことでしょうか。筆者が 6 の様々な性質を学んだ時、この数への認識が「5 と 7 の間」から、もっとずっと広がりのあるものへと変化しました。今すぐ役立つ発見は確かに重要ですが、特に役立ちそうにないことが私たちの心を豊かにし、世界を輝かせてくれることも少なくありません。見落としやすい小さな事柄から自分なりの宝物を見つけて心に蓄えることは、人やものを大切にする気持ちを育てることにつながると思います。また、豊かな感性や発想を持つ人が増えることは、やがて世を変える重要な発見を生む可能性を高めてくれるだろうとも思います。

みなさんの「眼（まなこ）」に映る世界が輝くものになりますよう、「科学好きのみんなを育てる」をスローガンに掲げる当館から、発見や感動のお手伝いができればと願ってやみません。

---

[i] 姫路科学館ホームページ https://www.city.himeji.lg.jp/atom/research/manako/index.html （2024.5.25 閲覧）
[ii] コンスタンス・レイド, 1971, ゼロから無限へ - 数論の世界を訪ねて. 講談社.
[iii] MacTutor 「Perfect numbers」https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Perfect_numbers/（2024.6.3 閲覧）
[iv] GIMPS https://www.mersenne.org/ （2024.6.3 閲覧）